MATHEMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

On considère l'équation différentielle $E_{\alpha,\lambda}$:

$$E_{\alpha,\lambda} \quad : \quad y' = -\frac{\alpha}{x}y - \frac{|x|^{\alpha}}{x-\lambda}y^2$$

où y est la fonction inconnue de la variable réelle x et dans laquelle α et λ sont des paramètres réels donnés vérifiant : $\alpha \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$.

PREMIÈRE PARTIE

1° Résoudre l'équation différentielle $E_{0,\lambda}$ (où $\alpha = 0$; λ restant quelconque positif ou nul) en précisant les intervalles de $\mathbf{R}$ sur lesquels les fonctions obtenues sont solutions de cette équation différentielle.

2° Intégrer l'équation différentielle $E_{\alpha,\lambda}$ dans le cas général où $\alpha \neq 0$. Montrer qu'en général, toute solution considérée comme fonction sur $\mathbf{R}$ admet quatre points de discontinuité.

Montrer que pour chacune des valeurs de λ différentes de zéro, il est possible de choisir la constante d'intégration de telle façon que cette fonction admette seulement trois points de discontinuité.

On désigne par $f_{\alpha,\lambda}$ la fonction ainsi obtenue.

Montrer que cette fonction est explicitement déterminée par :

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{1}{|x|^{\alpha} \operatorname{Log}\left|\dfrac{x-\lambda}{\lambda}\right|}$$

Quel est le domaine de définition de la fonction solution lorsque $\lambda = 0$?

3° On suppose dans cette question $\lambda \neq 0$ (donc $\lambda > 0$) et on propose d'étudier les fonctions $f_{\alpha,\lambda}$ dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

a. En utilisant les graphes des fonctions $\alpha \to \operatorname{Log}\alpha$ et $\alpha \to \dfrac{\alpha+1}{\alpha}$, étudier le signe de

$$q = -\alpha \operatorname{Log}\alpha + \alpha + 1$$

et montrer que ce nombre q s'annule pour une valeur unique α_0 comprise entre e et $2e$.

b. Étudier les variations de la fonction $g_{\alpha,\lambda}$ définie par :

$$g_{\alpha,\lambda}(x) = \alpha \operatorname{Log}\left|\frac{x-\lambda}{\lambda}\right| + \frac{x}{x-\lambda}$$

dans l'intervalle $]0, +\infty[$ et en déduire le signe des images de cette fonction en discutant suivant les valeurs des paramètres.

c. En utilisant la question précédente, décrire la famille des graphes des fonctions $f_{\alpha,\lambda}$ en discutant les différentes formes suivant les valeurs attribuées aux paramètres α et λ, l'intervalle de variation restant toujours $]0, +\infty[$.

4° On suppose toujours $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$. Étudier les natures des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^{\frac{\lambda}{2}} f_{\alpha,\lambda}(t)\,dt, \quad \int_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda} f_{\alpha,\lambda}(t)\,dt, \quad \int_{3\frac{\lambda}{2}}^{2\lambda} f_{\alpha,\lambda}(t)\,dt, \quad \int_{3\lambda}^{\infty} f_{\alpha,\lambda}(t)\,dt,$$

suivant les valeurs de α.

DEUXIÈME PARTIE

On considère les fonctions F_{α} définies par :

$$F_{\alpha}(t) = \frac{1}{t^{\alpha}\operatorname{Log} t}$$

et on étudie les intégrales de ces fonctions sur l'intervalle $[x, x^2]$ de $\mathbf{R}$, définissant ainsi les nouvelles fonctions :

$$x \to G_{\alpha}(x) = \int_x^{x^2} F_{\alpha}(t)\,dt.$$

.../...

1° Déterminer le domaine de définition de G_α et sa dérivée lorsqu'elle existe.

2° On suppose $\alpha = 0$.

a. Déterminer les limites finies ou infinies de G_α lorsque x tend vers 0 ou lorsque x tend vers l'infini (Pour cette dernière, on pourra utiliser une minoration simple de $\operatorname{Log} t$.)

b. Montrer que, lorsque x tend vers 1, la limite de G_α est finie. Déterminer cette limite. (A l'aide d'un changement de variable on montrera qu'il revient au même de déterminer la limite lorsque y tend vers 0 de l'intégrale : $\int_y^{2y} \frac{e^t}{t}\,dt$, cette limite pouvant être calculée, par exemple, au moyen d'une intégration par parties.)

3° On suppose $\alpha = 1$. Montrer que la fonction G_α est une constante sur chacun des intervalles où elle est définie. Déterminer cette fonction G_1.

4° On suppose $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$. Étudier les limites lorsque x tend vers zéro, lorsque x tend vers 1 et lorsque x tend vers l'infini des fonctions G_α. On montrera, en particulier que, lorsque x tend vers un, on obtient une limite finie s'exprimant sous forme d'une somme d'intégrales de Riemann faisant intervenir des fonctions continues sur des intervalles compacts. (On ne demande pas de calculer ces intégrales.)

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie, on propose d'étudier, à l'aide de certains résultats obtenus dans la partie précédente, des limites de certaines sommes particlles de séries divergentes.

1° Montrer que $\lim_{p\to\infty} \sum_{n=p}^{n=p^2} \frac{1}{n \operatorname{Log} n}$ existe et déterminer cette limite.

2° *a.* Démontrer que la série $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2 \operatorname{Log}\left(\frac{1+n}{n}\right)}$ est divergente.

b. Démontrer que, lorsque p tend vers l'infini, il existe une limite finie pour les sommes S_p définies par

$$S_p = \sum_{n=p}^{n=2p} \frac{1}{n^2 \operatorname{Log}\left(\frac{1+n}{n}\right)}$$

et déterminer cette limite.

3° On suppose $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$.

a. Démontrer que la série :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha n^2 \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

est divergente.

b. Démontrer que, lorsque p tend vers l'infini, il existe une limite finie pour les sommes :

$$S_{\alpha,p} = \sum_{n=p}^{n=2p} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha n^2 \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail